УДК 519. 615.5

А. А. Буздин, Е. А. Васильева

КАСАТЕЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

Представлен метод решения больших систем линейных уравнений, основанный на неполном блочном разложении блочных трехдиагональных матриц. Этот метод является обобщением частотно-фильтрующего метода, предложенного Г. Виттумом в [1], методов, описанных в работах [2 – 4] и др.

We present a preconditioner for large systems of linear equations based on the incomplete block decomposition for block-tridiagonal matrices. This method generalizes frequency-filtering method of G. Wittum [1] and methods developed in [2–4] etc.

Ключевые слова: большая система линейных уравнений, блочное разложение, блочная трехдиагональная матрица, частотно-фильтрующий метод.

Key words: large system of linear equations, block decomposition, block-tridiagonal matrix, frequency-filtering method.

Введение

Рассмотрим систему линейных уравнений вида

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{F} \tag{1}$$

с положительно определенной блочно-трехдиагональной матрицей

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & -\mathbf{L}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{L}_1 & \mathbf{D}_2 & -\mathbf{L}_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{n-1} & -\mathbf{L}_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{L}_{n-1} & \mathbf{D}_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2014. Вып. 10. С. 161 – 169.

где матрицы $\mathbf{L}_k$ и $\mathbf{D}_k$ — матрицы размерности $m \times m$. Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{F}$ имеют вид $\mathbf{u}$ = blockvector{$\mathbf{u}_k$}, $\mathbf{F}$ = blockvector{$\mathbf{F}_k$}, где $\mathbf{u}_k$, $\mathbf{F}_k \in R^m$. Система (1) может быть решена при помощи полного блочного разложения $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{L} + \mathbf{T})\, \mathbf{T}^{-1}\, (\mathbf{U} + \mathbf{T}),$$

где $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ — соответственно нижняя и верхняя блочно-треугольные матрицы; $\mathbf{T}$ — блочно-диагональная матрица $\mathbf{T}$ = blockdiag{$\mathbf{T}_k$}; блоки $\mathbf{T}_k$ удовлетворяют следующей рекурсии

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{D}_1,\ \mathbf{T}_k = \mathbf{D}_k - \mathbf{L}_{k□1}\ \mathbf{T}_{k-1}^{-1}\ \mathbf{L}_{k□1},\ k > 1.$$

Решение $\mathbf{u}$ может быть получено в два этапа:

1. $\mathbf{v} = \mathbf{T}^{-1}\,(\mathbf{F} - \mathbf{L}\mathbf{v})$. 2. $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{T}^{-1}\mathbf{L}^T\,\mathbf{u}$.

Для этого требуется эффективно решать системы с матрицами $\mathbf{T}_k$, что весьма затруднительно, так как матрицы $\mathbf{T}_k$ при $k > 1$ не являются разреженными.

Метод неполного блочного разложения основывается на замене матриц $\mathbf{T}_k$ на их разреженные аппроксимации $\widetilde{\mathbf{T}}_k$, что приводит к следующей факторизации матрицы $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = (\mathbf{L} + \widetilde{\mathbf{T}})\,\widetilde{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\mathbf{T}}) - \mathbf{N}, \tag{3}$$

где $\widetilde{\mathbf{T}}$ = blockdiag{$\widetilde{\mathbf{T}}_k$}. Матрица $\mathbf{N}$ называется матрицей остатка и имеет вид $\mathbf{N}$ = blockdiag{$\mathbf{N}_k$}. Матрица $\mathbf{W} = (\mathbf{L} + \widetilde{\mathbf{T}})\,\widetilde{\mathbf{T}}^{-1}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}} + \widetilde{\mathbf{T}})$ является теперь «легко обратимой» и может быть использована в качестве предобуславливателя. Скорость сходимости методов такого типа зависит от способа конструкции блоков $\widetilde{\mathbf{T}}_k$.

Статья посвящена фильтрующему разложению, впервые предложенному в [1]. Матрицы $\mathbf{W}$ этого разложения строятся так, чтобы удовлетворять фильтрующим условиям либо поточечно

$$\mathbf{N}\mathbf{e} = \mathbf{0} \tag{4}$$

для некоторого тестового вектора $\mathbf{e}$, либо усредненно.

Выбор гладкого или быстроменяющегося тестового вектора $\mathbf{e}$ приводит к предобуславливателю $\mathbf{W}$, сильно подавляющему соответственно низкочастотные или высокочастотные компоненты ошибки.

В касательном частотно-фильтрующем разложении, введенном в [4], диагональные блоки имеют вид

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{D}_1,\ \mathbf{T}_k = \mathbf{D}_k + \boldsymbol{\Theta}_k\widetilde{\mathbf{T}}_{k-1}\boldsymbol{\Theta}_k - \mathbf{L}_{k-1}\boldsymbol{\Theta}_k - \boldsymbol{\Theta}_k\mathbf{L}_{k-1},\ k > 1, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\Theta}_k$ —диагональные $m \times m$ матрицы, вычисляемые в соответствии с фильтрущими условиями (4), имеющими в этом случае вид

$$\widetilde{\mathbf{T}}_{k-1}\boldsymbol{\Theta}_k\mathbf{e} = \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{e}\,.$$

В работе [2] матрицы $\boldsymbol{\Theta}_k$ заменяются скалярными параметрами μ_k, которые выбираются в соответствии с условиями

$$(\mathbf{N}\mathbf{e}, \mathbf{e}) \to \min\,. \tag{6}$$

Такой выбор параметров приводит к касательному разложению с диагональными блоками

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{D}_1, \quad \widetilde{\mathbf{T}}_k = \mathbf{D}_k + \mu_{k-1}^2 \widetilde{\mathbf{T}}_{k\text{-}1} - 2\mu_{k-1}\mathbf{L}_{k-1}, k > 1, \tag{7}$$

Условие (6) приводит к равенству

$$\mu_k = \frac{(\mathbf{L}_k \mathbf{e}, \mathbf{e})}{(\widetilde{\mathbf{T}}_k \mathbf{e}, \mathbf{e})}. \tag{8}$$

В работе [3] было рассмотрено более общее двухчастотное разложение, в котором

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1 = \mathbf{D}_1, \quad \widetilde{\mathbf{T}}_k = \mathbf{D}_k + \mu_{k-1}^{(1)} \mu_{k-1}^{(2)} \widetilde{\mathbf{T}}_{k\text{-}1} - (\mu_{k-1}^{(1)} + \mu_{k-1}^{(2)})\, \mathbf{L}_k, k > 1, \tag{9}$$

с двумя последовательностями параметров $\mu_k^{(1)}$ и $\mu_k^{(2)}$

$$\mu_k^{(1)} = \frac{(\mathbf{L}_k \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(1)})}{(\widetilde{\mathbf{T}}_k \mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(1)})}, \quad \mu_k^{(2)} = \frac{(\mathbf{L}_k \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)})}{(\widetilde{\mathbf{T}}_k \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{e}^{(2)})},$$

где $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ — некоторые тестовые вектора.

Для модельной задачи, то есть в случае, если матрица (2) имеет вид

$$\mathbf{K} = \text{blocktridiag}\{-\mathbf{L}, \mathbf{D}, -\mathbf{L}\}, \tag{10}$$

касательное и двухчастотное разложение можно записать в более простых видах. В этом случае диагональные блоки $\mathbf{T}_k$ полного разложения задаются формулами

$$\mathbf{T}_k = L^{\frac{1}{2}} f_k(\mathbf{C}) L^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

где $\mathbf{C} = \mathrm{L}^{-\frac{1}{2}} \mathrm{D} \mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}$ и f_k — рациональные функции;

$$f_1(\lambda) = \lambda, \quad f_k(\lambda) = \lambda - \frac{1}{f_{k-1}(\lambda)}, k > 1. \tag{12}$$

Как касательное, так и двухчастотное разложения матрицы $\mathbf{K}$ получаются заменой функций f_k в (11) на их некоторые линейные аппроксимации $\widetilde{f}_k$. В случае касательного разложения функции $\widetilde{f}_k$ представляют собой касательные к функциям f_k в точках $\hat{\lambda}$, задаваемых параметрически так, чтобы $\widetilde{\mathbf{T}}_k = f_k(\hat{\lambda})D + f_k'(\hat{\lambda})(D - \hat{\lambda}L)$. Двухчастотное разложение соответствует линейной аппроксимации функций f_k, которая строится по заданным точкам $\hat{\lambda}^{(1)}$ и $\hat{\lambda}^{(2)}$: $\widetilde{\mathbf{T}}_k = f_k(\hat{\lambda}^{(1)})D + \Delta_{12} f_k (D - \hat{\lambda}^{(1)} L)$, где $\Delta_{12} f_k = \dfrac{f_k(\hat{\lambda}^{(2)}) - f_k(\hat{\lambda}^{(1)})}{\hat{\lambda}^{(2)} - \hat{\lambda}^{(1)}}$.

Используя (12), можно показать, что блоки касательного разложения получаются по формуле (7), где $\mu_k = 1/f_k(\hat{\lambda})$, а блоки двухчастотного разложения вычисляются по формуле (7), где $\mu_k^{(1)} = 1/f_k(\hat{\lambda}^{(1)})$, $\mu_k^{(2)} = 1/f_k(\hat{\lambda}^{(2)})$. Было показано, что для всех рассмотренных разложений при оптимальном выборе параметров спектральный радиус матрицы перехода удовлетворяет следующей оценке $\rho(\mathbf{I} - \mathbf{W}^{-1}\mathbf{K}) = 1 - O(h^{\frac{2}{3}})$, где h — шаг сетки. Таким образом, использование этих методов в качестве предобуславливателя в методе сопряженных градиентов дает скорость сходимости порядка $1-O(h^{1/3})$. Можно получить еще большую эффективность метода, если использовать не одно, а последовательность касательных разложений с различными параметрами $\hat{\lambda}$. Как показано в работе [1], если использовать число разложений, пропорциональное логарифму шага сетки, то скорость сходимости метода не будут зависеть от шага сетки.

1. Обобщенное касательное разложение

Как показал анализ модельной задачи (1), (10), касательное и двухчастотное разложения основаны на линейных аппроксимациях функций из (12). Рассмотрим их приближение рациональными аппроксимациями

$$\tilde{f}(\lambda) = P_L(\lambda)/Q_M(\lambda), \tag{13}$$

где $P_L(\lambda)$ и $Q_M(\lambda)$ — многочлены степени L и M соответственно. Использование рациональных аппроксимаций приводит к дальнейшему увеличению порядка скорости сходимости разложений (см. [5]).

Пусть задано множество N различных точек z_i на комплексной плоскости и связанное с каждой из них представление функции

$$\left\{ \sum_{j=0}^{m_i-1} u_{i,j}(z-z_i)^j + O[(z-z_i)]^{m_i} \right\}. \tag{14}$$

Построим рациональную дробь $P_L(z)/Q_M(z)$ такую, чтобы она обладала свойствами (14), а степени числителя и знаменателя удовлетворяли

$$M + L = N = \sum_{j=0}^{N} m_i - 1 \tag{15}$$

так, чтобы число неизвестных коэффициентов совпадало с числом условий. Если все условия рассматриваются в единственной точке, то задача называется задачей Паде. Если все $m_i = 1$, то задача называется задачей Коши — Якоби. В общем случае задача называется обобщенной задачей Паде. Существует ряд способов ее решения (см., напр., [6] и [7]).

Для того чтобы определить обобщенное касательное разложение, приведем решение обобщенной задачи Паде для случая, когда в (14) все $m_i = 2$.

Теорема 1. *Пусть* $f_i = u_{i,0}$, $f_i' = u_{i,1}$ *и*

$$T^{i,j}(z) = f_i + \frac{f_j - f_i}{z_j - z_i}(z - z_i), \ (i \neq j), \quad T^{i,i}(z) = f_i + f_i'(z - z_i). \tag{16}$$

Тогда решение обобщенной задачи Паде для случая $m_i = 2$, $L = M + 1$ *имеет вид*

$$\tilde{f}(z) = P_{M+1}(z)/Q_M(z) = (\mathbf{1}^T \mathbf{W}_N \mathbf{1})^{-1}, \tag{17}$$

где матрица $\mathbf{W}_N = \{T_{i,j}(z)\}$, $i, j = 1, \ldots M$ *и многочлены* $P_{M+1}(z)$ и $Q_M(z)$:

$$P_{M+1}(z) = \det \mathbf{W}_N, \quad Q_M(z) = -\det\begin{pmatrix} 0 & 1^T \\ 1 & \mathbf{W}_N \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в [5].

Эта теорема позволяет рассмотреть неполное блочное LU-разложение

$$\mathbf{W}^{(p)}=(\mathbf{L}+\widetilde{\mathbf{T}}^{(p)})\left(\widetilde{\mathbf{T}}^{(p)}\right)^{-1}(\mathbf{L}^{\mathrm{T}}+\widetilde{\mathbf{T}}^{(p)}),\qquad(19)$$

где $\widetilde{\mathbf{T}}^{(p)}=\mathrm{blockdiag}\left\{\widetilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}\right\}$ — матрица, состоящая из блоков

$$\widetilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}=L^{\frac{1}{2}}\,\widetilde{f}_k^{(p)}(\mathbf{C})L^{\frac{1}{2}}.\qquad(20)$$

Способ построения этих блоков описывается в следующей легко проверяемой теореме:

Теорема 2. *Для блоков* $\widetilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ *справедливо следующее равенство:*

$$\widetilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}=\left[\begin{pmatrix}I\\I\\\vdots\\I\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{T}}_k^{1,1}&\widetilde{\mathbf{T}}_k^{1,2}&\cdots&\widetilde{\mathbf{T}}_k^{1,p}\\\widetilde{\mathbf{T}}_k^{2,1}&\widetilde{\mathbf{T}}_k^{2,2}&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\vdots\\\widetilde{\mathbf{T}}_k^{p,1}&\widetilde{\mathbf{T}}_k^{p,2}&\cdots&\widetilde{\mathbf{T}}_k^{p,p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I\\I\\\vdots\\I\end{pmatrix}\right]^{-1},\qquad(21)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,i}&=f_k(\hat{\lambda}^{(i)})D+f_k'(\hat{\lambda}^{(i)})(D-\hat{\lambda}^{(i)}L),\\\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,j}&=f_k(\hat{\lambda}^{(i)})D+\Delta_{ij}f_k(D-\hat{\lambda}^{(i)}L),\quad i\neq j.\end{aligned}\qquad(22)$$

Как видно из формул (22), в случае модельной задачи блоки $\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,i}$ и $\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,j}$ представляют собой диагональные блоки касательного и двухчастотного разложений соответственно. Следовательно, их можно вычислить по рекуррентным формулам (7) и (9). Это позволяет обобщить разложение (19) матрицы более общего вида

$$\mathbf{K}=\begin{pmatrix}\mathbf{D}_1&-\mathbf{L}_1^T&0&\cdots&0\\-\mathbf{L}_1&\mathbf{D}_2&-\mathbf{L}_2^T&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\mathbf{D}_{n-1}&-\mathbf{L}_{n-1}^T\\0&\cdots&0&-\mathbf{L}_{n-1}&\mathbf{D}_n\end{pmatrix},\qquad(23)$$

где $\mathbf{D}_k$ и $\mathbf{L}_k$ — $m\times m$ матрицы.

Определение 1. *Неполное блочное LU-разложение* (19), *где диагональные блоки имеют вид (21), в котором* $\widetilde{T}_k^{i,j}$ *задаются рекуррентными соотношениями*

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1^{i,i}=\mathbf{D}_1,\quad\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,i}=\mathbf{D}_k+\left(\mu_{k-1}^{(i)}\right)^2\widetilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{i,i}-\mu_{k-1}^{(i)}(\mathbf{L}_{k-1}+\mathbf{L}_{k-1}^{\mathrm{T}}),\,k>1,\,i\neq j;\qquad(24)$$

$$\widetilde{\mathbf{T}}_1^{i,j}=\mathbf{D}_1,\quad\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,j}=\mathbf{D}_k+\mu_{k-1}^{(i)}\,\mu_{k-1}^{(j)}\,\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,j}-\mu_{k-1}^{(i)}\mathbf{L}_{k-1}-\mu_{k-1}^{(j)}\,\mathbf{L}_{k-1}^T,\,k>1,\,i\neq j\qquad(25)$$

с параметрами $\mu_k^{(i)}\in R$, *назовем обобщенным касательным разложением порядка p.*

Обратим внимание на то, что если матрица исходной системы уравнений имеет вид (2), формулы (24), (25) совпадают с рекуррентными формулами (7) и (9). Поэтому можно рассматривать (24), (25) как обобщение касательного и двухчастотного разложений на матрицы вида (23).

Рассмотрим далее вопрос корректности сформулированного определения. В силу построения матрицы $\widetilde{\mathbf{T}}_k^{i,j}=\left(\widetilde{\mathbf{T}}_k^{j,i}\right)^T$ и матрицы $\widetilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ всегда симметричные. Покажем, что блоки $\widetilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ положительно определены, если таким же свойством обладает матрица системы **K**. Для этого мы сначала дадим другое, эквивалентное прежнему, определение этих блоков $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$.

Рассмотрим подпространства векторов $X_k \subseteq R^{nm}$ такие, что каждое подпространство X_k состоит из блочных векторов $\mathbf{v}^{(k)} = \text{blockvector}\{\mathbf{v}_l^{(k)}\}$, у которых компоненты $\mathbf{v}_l^{(k)} = 0$ при $l \neq k$. Пусть для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant p$, определены матрицы линейных отображений $\mathbf{p}_k^{(i)} : X_k \to R^{nm}$, где $\mathbf{p}_k^{(i)} = (\mu_1^{(i)} \cdots \mu_{k-1}^{(i)}\mathbf{I},\ \mu_2^{(i)} \cdots \mu_{k-1}^{(i)}\mathbf{I}, \ldots,\ \mu_{k-1}^{(i)}\mathbf{I},\ \mathbf{I}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})^T$ и $\mathbf{r}_k^{(i)} = \left(\mathbf{p}_k^{(i)}\right)^T : R^{nm} \to X_k$.

Теорема 3. *Блоки* $\tilde{\mathbf{T}}_k^{i,i}$ *касательного разложения можно получить по формуле*

$$\tilde{\mathbf{T}}_k^{i,i} = \mathbf{r}_k^{(i)}\,\mathbf{K}\,\mathbf{p}_k^{(i)}. \tag{26}$$

Доказательство. Легко проверить, что $\tilde{\mathbf{T}}_1^{i,i} = \mathbf{D}_1$, а при $k > 1$ блоки $\tilde{\mathbf{T}}_k^{i,i}$ удовлетворяют следующей рекурсии:

$$\tilde{\mathbf{T}}_k^{i,i} = \mathbf{r}_k^{(i)}\,\mathbf{K}\,\mathbf{p}_k^{(i)} = \mathbf{D}_k + \left(\mu_{k-1}^{(i)}\right)^2 \mathbf{r}_{k-1}^{(i)}\,\mathbf{K}\,\mathbf{p}_{k-1}^{(i)} - \mu_{k-1}^{(i)}(\mathbf{L}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1}^{\mathrm{T}}) =$$

$$= \mathbf{D}_k + \left(\mu_{k-1}^{(i)}\right)^2 \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{i,i} - \mu_{k-1}^{(i)}(\mathbf{L}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1}^{\mathrm{T}}),$$

которая совпадает с рекурсией (24). Аналогично можно показать, что блоки двухчастотного разложения $\tilde{\mathbf{T}}_k^{i,j}$ получаются по формуле $\tilde{\mathbf{T}}_k^{i,i} = \mathbf{r}_k^{(j)}\,\mathbf{K}\,\mathbf{p}_k^{(i)}$.

Введем матрицы

$$\mathbf{P}_k^{(p)} = (\mathbf{p}_k^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}_k^{(p)}),\ \vec{\mathbf{I}}_p = (\mathbf{I}, \mathbf{I}, \ldots, \mathbf{I}) \text{ и } \mathbf{K}_k^{(p)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,1} & \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,p} \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{2,1} & \tilde{\mathbf{T}}_k^{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{p,1} & \tilde{\mathbf{T}}_k^{p,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_k^{p,p} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\mathbf{K}_k^{(p)} = \left(\mathbf{P}_k^{(p)}\right)^T \mathbf{K}\,\mathbf{P}_k^{(p)}$, а $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)} = \left(\vec{\mathbf{I}}_p \left(\mathbf{K}_k^{(p)}\right)^{-1} \vec{\mathbf{I}}_p^T\right)^{-1}$. □

Теорема 4. *Пусть матрица* $\mathbf{P}_k^{(p)}$ *невырожденная. Тогда блок* $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(k)}$ *совпадает с блоком* $\mathbf{T}_k$ *полного блочного разложения матрицы* **K**.

Доказательство. Запишем блоки полного блочного разложения $\mathbf{T}_k$ в таком виде: $\mathbf{T}_k = \left(\mathbf{I}_0 \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{I}_0^T\right)^{-1}$, где $\mathbf{K}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & -\mathbf{L}_1^T & 0 & \cdots & 0 \\ -\mathbf{L}_1 & \mathbf{D}_2 & -\mathbf{L}_2^T & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{D}_{k-1} & -\mathbf{L}_{k-1}^T \\ 0 & \cdots & 0 & -\mathbf{L}_{k-1} & \mathbf{D}_k \end{pmatrix}$ и $\mathbf{I}_0 = (0, \ldots, 0, \mathbf{I})$. Так как матрицы $\mathbf{P}_k^{(k)} = (\mathbf{p}_k^{(1)}, \ldots, \mathbf{p}_k^{(k)})$ размерности $km \times km$ невырожденные, то для матрицы $\mathbf{T}_k$ справедливо

$$\mathbf{T}_k = \left(\mathbf{I}_0 \mathbf{K}_k^{-1} \mathbf{I}_0^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{I}_0 \mathbf{P}_k^{(k)} \left(\left(\mathbf{P}_k^{(k)}\right)^T \mathbf{K}_k\ \mathbf{P}_k^{(k)}\right)^{-1} \left(\mathbf{P}_k^{(k)}\right)^T \mathbf{I}_0^T\right)^{-1}.$$

Легко проверить, что

$$\mathbf{K}_k^{(k)} = \left(\mathbf{P}_k^{(k)}\right)^T \mathbf{K}_k\ \mathbf{P}_k^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,1} & \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,k} \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{2,1} & \tilde{\mathbf{T}}_k^{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{k,1} & \tilde{\mathbf{T}}_k^{k,2} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_k^{k,k} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{I}_0 \mathbf{P}_k^{(k)} = (\mathbf{I}, \mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}) = \vec{\mathbf{I}}_k.$$

Тогда справедливо равенство $\mathbf{T}_k = \left(\vec{\mathbf{I}}_p \left(\mathbf{K}_k^{(k)}\right)^{-1} \vec{\mathbf{I}}_p^T\right)^{-1} = \tilde{\mathbf{T}}_k^{(k)}$. □

Теорема 5. *Пусть матрица **K** симметричная, положительно определенная. Пусть также при $1 \leqslant k \leqslant p$ матрицы $\mathbf{P}_k^{(k)}$, а для любого $k > p$ матрицы $\mathbf{P}_k^{(p)}$ невырожденные. Тогда для всех k блоки обобщенного касательного разложения $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ существуют и положительно определены. Кроме того, матрица остатка $\mathbf{R}^{(p)} = \mathbf{W}^{(p)} - \mathbf{K}$ имеет блочно-диагональный вид с блоками*

$$\mathbf{R}^{(p)} = \mathrm{blockdiag}\{\mathbf{R}_k^{(p)}\}, \tag{27}$$

где $\mathbf{R}_1^{(p)} = \dots = \mathbf{R}_p^{(p)} = 0$ и $\mathbf{R}_k^{(p)} \geq 0$, при $k \geqslant p+1$.

Доказательство. $\mathbf{K} = (\mathbf{L} + \mathbf{T})\,\mathbf{T}^{-1}\,(\mathbf{U} + \mathbf{T})$ — полное блочное разложение матрицы **K.** Так как матрица **K** положительно определена, то и матрицы $\mathbf{T}_i$ и $\mathbf{T}_i^{-1}$ также положительно определены.

Для доказательства существования обобщенного касательного разложения $\mathbf{W}^{(p)}$ матрицы **K** выведем по индукции следующие свойства: матрицы $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ положительно определены, более того, $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)} \geqslant \mathbf{T}_k > 0$; блоки матрицы остатка $\mathbf{R}_k^{(p)}$ все симметричные и удовлетворяют неравенству $\mathbf{R}_k^{(p)} \geqslant 0$. Для этого представим матрицу остатка в следующем виде: $\mathbf{R}^{(p)} = \tilde{\mathbf{T}}^{(p)} - \mathbf{T} + \mathbf{L}((\tilde{\mathbf{T}}^{(p)})^{-1} - \mathbf{T}^{-1})\mathbf{L}^T$. Отсюда видно, что $\mathbf{R}^{(p)}$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathbf{R}_k^{(p)} = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq p, \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)} - \mathbf{T}_k + \mathbf{L}_{k-1}\left(\left(\tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{(p)}\right)^{-1} - \mathbf{T}_{k-1}^{-1}\right)\mathbf{L}_{k-1}^T, & k > p. \end{cases} \tag{28}$$

Заметим, что в силу теоремы 4 предположения теоремы 5 справедливы при любом $k \in \{1, \dots, p\}$. Предположим, что они справедливы для некоторого $k = i - 1 \geqslant p$. Тогда из (28) следует $\tilde{\mathbf{T}}_i = \mathbf{R}_i^{(p)} + \mathbf{T}_i + \mathbf{L}_{i-1}((\tilde{\mathbf{T}}_{i-1})^{-1} - \mathbf{T}_{i-1}^{-1})\mathbf{L}_{i-1}^T$.

В силу индукционного преположения, $\tilde{\mathbf{T}}_{i-1} \geqslant \mathbf{T}_{i-1}$, следовательно, $\mathbf{T}_{i-1}^{-1} \geqslant \tilde{\mathbf{T}}_{i-1}^{-1}$, откуда $\mathbf{L}_{i-1}((\tilde{\mathbf{T}}_{i-1})^{-1} - \mathbf{T}_{i-1}^{-1})\mathbf{L}_{i-1}^T \geqslant 0$.

Для доказательства того, что $\mathbf{R}_i^{(p)} \geqslant 0$, перепишем (28) в виде

$$\mathbf{R}_k^{(p)} = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq p, \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)} - \left(\mathbf{D}_k - \mathbf{L}_{k-1}\left(\tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{(p)}\right)^{-1} \mathbf{L}_{k-1}^T\right), & k > p \end{cases}$$

и сравним матрицы $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ и $\hat{\mathbf{T}}_k = \mathbf{D}_k - \mathbf{L}_{k-1}\left(\tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{(p)}\right)^{-1} \mathbf{L}_{k-1}^T$ при $k > p$.

Отметим, что в силу определения матриц $\tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{(p)}$ матрицы $\hat{\mathbf{T}}_k$ имеют вид

$$\hat{\mathbf{T}}_k = \left(\begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{1,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{1,p} & \mathbf{L}_{k-1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{p,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{p,p} & \mathbf{L}_{k-1}^T \\ \mathbf{L}_{k-1} & \cdots & \mathbf{L}_{k-1} & \mathbf{D}_k \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \right)^{-1} =: \mathbf{A}^{-1}.$$

Обозначив $\mathbf{R} := \begin{pmatrix} \omega_1 \mathbf{I} & & & \\ & \omega_1 \mathbf{I} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{I} \end{pmatrix}$, представим матрицу $\mathbf{A}$ в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \mathbf{R} \left(\mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{1,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{1,p} & \mathbf{L}_{k-1}^T \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{p,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_{k-1}^{p,p} & \mathbf{L}_{k-1}^T \\ \mathbf{L}_{k-1} & \cdots & \mathbf{L}_{k-1} & \mathbf{D}_k \end{pmatrix} \mathbf{R} \right)^{-1} \mathbf{R}^T \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{I}}_{p+1}^T \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \vec{\mathbf{I}}_{p+1}.$$

Элементарные вычисления и применение рекурсий (24) и (25) дают

$$\mathbf{Z}_{11} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_k^{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{T}}_k^{p,1} & \cdots & \tilde{\mathbf{T}}_k^{p,p} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{12} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_k + \omega_1 \mathbf{L}_{k-1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{D}_k + \omega_p \mathbf{L}_{k-1}^T \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что для любой регулярной 2×2 блочной матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11} & \mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{Z}_{21} & \mathbf{Z}_{22} \end{pmatrix}$ справедлива формула $\mathbf{Z}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mathbf{Z}_{11}^{-1}\mathbf{Z}_{12} \\ \mathbf{I} \end{pmatrix} \mathbf{S}^{-1} \left(-\mathbf{Z}_{21}\mathbf{Z}_{11}^{-1}, \mathbf{I} \right)$, где $\mathbf{S} = \mathbf{Z}_{22} - \mathbf{Z}_{21}\mathbf{Z}_{11}^{-1}\mathbf{Z}_{12}$.

Применяя эту формулу, получим:

$$\mathbf{A} = \vec{\mathbf{I}}_p^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \vec{\mathbf{I}}_p + \left(\mathbf{I} - \vec{\mathbf{I}}_p^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \mathbf{Z}_{12} \right) \left(\mathbf{D}_k - \mathbf{Z}_{12}^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \mathbf{Z}_{12} \right)^{-1} \left(\mathbf{I} - \mathbf{Z}_{12}^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \vec{\mathbf{I}}_p \right). \tag{29}$$

Здесь $\mathbf{D}_k - \mathbf{Z}_{12}^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \mathbf{Z}_{12}$ — дополнение Шура положительно определенной матрицы. Отсюда $\mathbf{D}_k - \mathbf{Z}_{12}^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \mathbf{Z}_{12} > 0$ и из (29) имеем $\mathbf{A} \geqslant \vec{\mathbf{I}}_p^T \mathbf{Z}_{11}^{-1} \vec{\mathbf{I}}_p = (\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)})^{-1}$, то есть $\hat{\mathbf{T}}_k = \mathbf{A}^{-1} \leqslant \tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$. Таким образом, для $k > p$, справедливо $\mathbf{R}_k^{(p)} = \tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)} - \hat{\mathbf{T}}_k \geqslant 0$. Это доказывает, что для всех k блоки $\tilde{\mathbf{T}}_k^{(p)}$ положительно определены. □

Следствие. *Так как матрица остатка положительно полуопределена, то* $\mathbf{W}^{(q)} \geq \mathbf{K}$. *Это означает, что метод простой итерации с матрицей* $\mathbf{W}^{(q)}$ *в качестве предобуславливателя всегда сходится.*

Список литературы

1. *Wittum G.* Filternde Zerlegungen-Schnelle Löser für grosse Gleichungssysteme // Teubner Skripten zur Numerik. Stuttgart, 1992. Bd 1.

2. *Buzdin K.* Tangential decomposition // Computing. 1998. № 61. P. 257—276.

3. *Buzdin K., Wittum G.* Two-frequency decomposition. Preprint, Universität Heidelberg, 2000.

4. *Wagner C.* Tangential frequency filtering decompositions for symmetric matrices // Numer. Math. 1997. № 78. P. 119—142.

5. *Буздин А. А., Васильева Е. А.* Неполное блочное разложение, основанное на аппроксимациях Паде // Математическое моделирование. 2006. Т. 1, № 4. С. 89—99.

6. *Stoer J., Bulirsch R.* Introduction to numerical analysis. N. Y., 1992.

7. *Baker G. A.* P. Graves-Morris Pad'e Approximants. L., 1981.

Об авторах

Алексей Алексеевич Буздин — канд. физ.-мат. наук, доц., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград.

E-mail: buzdina@inbox.ru

Екатерина Алексеевна Васильева — канд. физ.-мат. наук, доц., Калининградский государственный технический университет.

E-mail: buzdina@inbox.ru

About the authors

Dr Aleksey Buzdin — Ass. Prof., I. Kant Baltic Federal University, Kaliningrad.

E-mail: buzdina@inbox.ru

Dr Ekaterina Vasilyeva — Ass. Prof., Kaliningrad State Technical University, Kaliningrad.

E-mail: buzdina@inbox.ru